Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 1

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2x^2 - 6y^2 + \alpha xy$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На пружине жесткостью k висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На нити длиной l висит грузик массой m. К нему на нити длиной αl прикреплен еще один грузик, масса которого $2m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $2m$ и $2m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $2k$, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, m, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, k, $2k$ и $2k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 2

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2x^2 - 6y^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 8q_2^2 + \alpha\dot{q}_1\dot{q}_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На нити длиной l висит грузик массой $2m$. К нему на нити длиной $2l$ прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости αk, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости αk. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На пружине жесткостью k висит грузик массой m. К нему на пружине жескостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Точка подвеса совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $3m$, $3m$ и m могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, k и $3k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $2m$, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, $2k$, k и $2k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 3

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 8q_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 4q^2 - Q^2 - \alpha qQ$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами αm и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На пружине жесткостью k висит грузик массой m. К нему на пружине жескостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На нити длиной l висит грузик массой $2m$. К нему на нити длиной $2l$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Точка подвеса совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $2m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $6k$, $3k$ и $2k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами $2m$, m, $2m$ и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, $3k$, k и $3k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 4

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 4q^2 - Q^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 9x_1^2 - 3x_2^2 + \alpha \dot{x_1}\dot{x_2}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На пружине жесткостью k висит грузик массой m. К нему на пружине жескостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого αm. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На нити длиной l висит грузик массой $2m$. К нему на нити длиной $2l$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Первая стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $4m$, m и m могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, $4k$ и $4k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $4m$, m и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $2k$, $2k$, k и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 5

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 9x_1^2 - 3x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - q_2^2/2 + \alpha q_1 q_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На пружине жесткостью k висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На нити длиной l висит грузик массой $2m$. К нему на нити длиной αl прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами m и $3m$ могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости $3k$, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, m и $2m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $2k$, $2k$ и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, m, m и $3m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, k, $2k$ и $2k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 6

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - q_2^2/2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 9q^2 - Q^2 - \alpha\dot{q}\dot{Q}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На нити длиной l висит грузик массой $2m$. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами αm и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами m и $3m$ могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости $3k$, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Точка подвеса совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $2m$, $2m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $3k$, $3k$ и $2k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, m, $2m$ и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, $3k$, $3k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 7

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 9q^2 - Q^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + 4\dot{x_2}^2 - 9x_1^2 - x_2^2 - \alpha x_1 x_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами m и $3m$ могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости αk, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На нити длиной l висит грузик массой m. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого $2m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Точка подвеса совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a \sin \omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $3m$, m и m могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, $3k$ и $3k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $3m$, m и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $2k$, $2k$, k и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 8

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + 4\dot{x_2}^2 - 9x_1^2 - x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 5\dot{y}^2 - x^2 - y^2 - \alpha\dot{x}\dot{y}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами m и $3m$ могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости k. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой αm. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На нити длиной l висит грузик массой m. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого $2m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Вторая стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $3m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $3k$, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, m, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, k, $2k$ и $2k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 9

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 5\dot{y}^2 - x^2 - y^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 4x_1^2 - x_2^2 - \alpha x_1 x_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой m. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На нити длиной l висит грузик массой m. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого αm. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $4m$, m и $2m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, $4k$ и $2k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, m, $3m$ и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, $2k$, $2k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 10

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 4x_1^2 - x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 3\dot{q_1}^2 + 4\dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 3q_2^2 + \alpha\dot{q_1}\dot{q_2}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На нити длиной l висит грузик массой $2m$. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости αk. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости αk. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Точка подвеса совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $6m$, $2m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, $3k$ и $2k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $2m$, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $2k$, k, $2k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 11

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 3\dot{q_1}^2 + 4\dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 3q_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + 12\dot{x_2}^2 - x_1^2 - 3x_2^2 + \alpha x_1 x_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами αm и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На нити длиной $2l$ висит грузик массой m. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Точка подвеса совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, m и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $3k$, $3k$ и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.
Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $3m$, m и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $2k$, $2k$, k и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 12

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + 12\dot{x_2}^2 - x_1^2 - 3x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2/2 + 2\dot{x_2}^2 - x_1^2 - x_2^2 + \alpha\dot{x_1}\dot{x_2}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На пружине жесткостью αk висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На нити длиной $2l$ висит грузик массой m. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Первая стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $3m$ и $2m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $6k$, $2k$ и $3k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами $2m$, m, m и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $3k$, k, k и $3k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 13

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2/2 + 2\dot{x_2}^2 - x_1^2 - x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + 4\dot{x_2}^2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + \alpha x_1 x_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На пружине жесткостью $4k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На нити длиной $2l$ висит грузик массой m. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого αm. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a \sin \omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $5m$ и $5m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $5k$, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2 \sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)} \cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами $2m$, $2m$, $2m$ и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, k, $3k$ и $3k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 14

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + 4\dot{x_2}^2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + 3\dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 2q_2^2 - \alpha\dot{q}_1\dot{q}_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На нити длиной $2l$ висит грузик массой m. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого $3m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами αm и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На пружине жесткостью k висит грузик массой $3m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Точка подвеса совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, m и $5m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $5k$, $5k$ и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами $2m$, m, $2m$ и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, $3k$, k и $3k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 15

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + 3\dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 2q_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + 2\dot{Q}^2 - 8q^2 - Q^2 - \alpha qQ$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами $3m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $2k$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости αk. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На пружине жесткостью k висит грузик массой $3m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На нити длиной $2l$ висит грузик массой $4m$. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Точка подвеса совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $2m$, m и $2m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, $2k$ и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $2m$, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $2k$, k, $2k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 16

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + 2\dot{Q}^2 - 8q^2 - Q^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 8x_1^2 - 2x_2^2 - \alpha\dot{x_1}\dot{x_2}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $2k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На пружине жесткостью k висит грузик массой αm. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На нити длиной $2l$ висит грузик массой $4m$. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $3m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Вторая стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $3m$ и m могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $3k$, k и $3k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, m, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, k, $3k$ и $3k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 17

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 8x_1^2 - 2x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 3q_2^2 + \alpha q_1 q_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На пружине жесткостью k висит грузик массой $4m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На нити длиной αl висит грузик массой $4m$. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $3m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. Стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами $3m$, m и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, $3k$ и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $2m$, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $3k$, k, $3k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 18

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 3q_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2x^2 - 4y^2 - \alpha\dot{x}\dot{y}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На нити длиной l висит грузик массой $4m$. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами αm и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Точка подвеса совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $3m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $3k$, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, m, $2m$ и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, $2k$, $2k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 19

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2x^2 - 4y^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 2x_1^2 - x_2^2 + \alpha x_1 x_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $2k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости k. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами $2m$ и αm могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости αk. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На нити длиной l висит грузик массой $3m$. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Точка подвеса совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, m и m могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, k, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.
Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами $2m$, m, m и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, $3k$, $3k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 20

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 2x_1^2 - x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + 3\dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 5q_2^2 + \alpha\dot{q}_1\dot{q}_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами $2m$ и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На пружине жесткостью αk висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На нити длиной l висит грузик массой $3m$. К нему на нити длиной $3l$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $3k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Первая стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $2m$ и m могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $2k$, k и $2k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $2m$, m и $2m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $3k$, k, $3k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 21

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + 3\dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 5q_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 2x_1^2 - x_2^2 - \alpha x_1 x_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На пружине жесткостью $2k$ висит грузик массой $2m$. К нему на пружине жескостью k прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На нити длиной l висит грузик массой $3m$. К нему на нити длиной αl прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами m и $2m$ могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $3k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. Стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a \sin \omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $3m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $3k$, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2 \sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)} \cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $3m$, m и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, k, k, $2k$ и $2k$. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 22

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - 2x_1^2 - x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 2Q^2 + \alpha\dot{q}\dot{Q}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На нити длиной l висит грузик массой $3m$. К нему на нити длиной $2l$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами m и αm могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $3k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На пружине жесткостью k висит грузик массой $4m$. К нему на пружине жескостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Точка подвеса совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $2m$ и $2m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $2k$, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $2m$, m и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $3k$, $3k$, k и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 23

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 2Q^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 8q_2^2 + \alpha q_1 q_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами m и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости $3k$, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. Два грузика массами m и αm могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На пружине жесткостью k висит грузик массой $4m$. К нему на пружине жескостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. На нити длиной l висит грузик массой m. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого $4m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Точка подвеса совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\sin\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $5m$ и m могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $5k$, k и $5k$. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\ \sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.
Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами $2m$, m, $2m$ и m, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $2k$, k, $2k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 24

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 8q_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 9\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - x_1^2 - 4x_2^2 - \alpha\dot{x_1}\dot{x_2}$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. Два грузика массами $2m$ и $3m$ могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости $3k$. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На пружине жесткостью k висит грузик массой $4m$. К нему на пружине жескостью αk прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. На нити длиной l висит грузик массой m. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого $4m$. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами m и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $4k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Вторая стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, $3m$ и $3m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $3k$, k и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\,\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перпендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $4m$, m и $4m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $2k$, k, $2k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.

Домашнее задание №17

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Вариант 25

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 9\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 - x_1^2 - 4x_2^2$. Рассмотрим частицу, которая может двигаться в плоскости XOY, так что ее декартовы координаты совпадают с обобщенными координатами системы. По какой траектории будет двигаться эта частица? Будет ли ее движение периодическим? Будет ли периодическим движение ее проекций?

2. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 - 2q_1^2 - 3q_2^2 + \alpha q_1 q_2$. Найдите частоты малых колебаний системы. При каких значениях параметра α система совершает финитное движение? Найдите нормальные координаты для системы.

3. На пружине жесткостью k висит грузик массой $4m$. К нему на пружине жескостью $2k$ прикреплен еще один грузик, масса которого m. Найдите свободные колебания системы, а также нормальные координаты. Выразите через них функцию Лагранжа.

4. На нити длиной l висит грузик массой m. К нему на нити длиной l прикреплен еще один грузик, масса которого αm. Грузики могут совершать малые колебания, находясь в одной вертикальной плоскости. Найдите колебания системы в предельном случае $\alpha \ll 1$. Как соотносятся собственные частоты системы? Опишите качественно движение системы при различных начальных условиях.

5. Два грузика массами m и m могут двигаться в горизонтальном направлении между двумя стенками. Первый грузик прикреплен к одной из стенок пружиной жесткости k, второй прикреплен ко второй стенке пружиной жесткости $4k$. Кроме того, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. На каждую частицу действует сила трения, пропорциональная ее массе и скорости. Считая коэффициент пропорциональности γ малым, найдите колебания системы и нормальные координаты.

6. Два грузика массами $2m$ и m могут двигаться в горизонтальном направлении. Первый грузик прикреплен к вертикальной стенке пружиной жесткости k, второй прикреплен к этой же стенке пружиной жесткости $3k$. Кроме этого, оба грузика соединены третьей пружиной жесткости k. Стенка совершает колебания в горизонтальном направлении по закону $x_w(t) = a\cos\omega t$. Найдите установившиеся колебания системы, перейдя к нормальным координатам. Какой силе эквивалентны такие возмущения системы?

7. Рассмотрим пример, когда некоторые из собственных частот вырождены. Три частицы массами m, m и $4m$ могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, расположенных напротив первой, второй и третьей частицы, равны, соответственно, $4k$, $4k$ и k. Найдите свободные колебания грузиков и нормальные координаты. Получите общее условие, которому должны удовлетворять массы $m_{1,2,3}$ грузиков и жесткости $k_{1,2,3}$ пружинок, чтобы в системе наступило вырождение частот?

8. Анализ более сложных систем можно проводить, частично угадывая нормальные колебания и тем самым эффективно уменьшая количество степеней свободы. При этом очень важным оказывается такое утверждение. Если l-ое нормальное колебание для системы с функцией Лагранжа $L = 1/2\sum_{i,j}(m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_i x_j)$ имеет вид $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)}\cos(\omega_l t + \varphi_l)$, вектора $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$ и $\mathbf{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots, A_N^{(s)})$, соответствующие различным частотам ω_l и ω_s, перепендикулярны в метрике, определяемой тензорами m_{ij} или k_{ij}, т.е. $\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)}$. Докажите это.

Применим это утверждение для нахождения колебаний системы, состоящей из четырех частиц массами m, $3m$, m и $3m$, которые могут двигаться без трения по проволочному кольцу. Частицы соединены пружинками, намотанными на кольцо. Жесткости пружинок, соединяющих первую и вторую частицы, вторую и третью, и т.д. равны, соответственно, $3k$, k, $3k$ и k. Угадайте часть нормальных колебаний такой системы. Затем, воспользовавшись доказанным условием ортогональности, упростите уравнения движения и найдите остальные нормальные колебания.

9. Молекулу можно рассматривать

10.